# Лекция 12

## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ. СХОДИМОСТЬ В $\boldsymbol{H}^1$

Как следует из оценки (11.24) $H^1$-норма разности между точным и конечноэлементным решениями оценивается через эту же норму разности между точным решением и любой функцией $v^h$ из конечноэлементного пространства. Исследуем вопрос о возможности использования в качестве $v^h$ интерполянта точного решения.

### 1. Первая оценка интерполяции

Пусть в качестве конечноэлементного пространства $\tilde{S}^h$ выступает пространство кусочно-линейных, непрерывных, линейных на каждом элементе функций, которые обращаются в нуль при $x = 0$, т.е. пусть $\tilde{S}^h \equiv \tilde{S}^h_1$ (см. (3.13), (3.8)). Обозначим через $v(x_i)$ значения непрерывной функции $v(x)$ в узлах $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N$ конечных элементов $e^{(i)}, i = 1, \ldots, N$ и введем в рассмотрение функцию

$$i_h v(x) \in S^h_1, \quad i_h v(x_i) = v(x_i), \tag{1}$$

которую будем называть *интерполянтом* $v(x)$. Оценим разность между $v(x)$ и ее интерполянтом. Имеет место

**Теорема 1.** *Если* $v(x) \in C^2(\bar{I})$, *а* $i_h v \in S_1^h$ *— ее интерполянт, то*

$$|v(x) - i_h v(x)| \leqslant \frac{h^2}{8} \max_{x \in \bar{I}} |v''(x)|, \tag{2}$$

$$\left| \frac{d}{dx}(v(x) - i_h v(x)) \right| \leqslant h \max_{x \in \bar{I}} |v''(x)|. \tag{3}$$

Доказательство. Неравенство (2) представляет собой хорошо известную из курса численных методов оценку точности *лагранжевой интерполяции* на $e^{(i)}$ линейными функциями. Оценка (3) известна меньше. Здесь мы докажем обе оценки.

Оценки будем проводить на каждом элементе $e^{(i)}$ отдельно. Пусть

$$v(x) - i_h v(x) = R^{(i)}(x), \quad x \in e^{(i)}. \tag{4}$$

Так как

$$v(x_{i-1}) = i_h v(x_{i-1}), \quad v(x_i) = i_h v(x_i), \tag{5}$$

то погрешность интерполяции $R^{(i)}(x)$ может быть представлена в виде

$$R^{(i)}(x) = (x - x_{i-1})(x - x_i) r^{(i)}(x), \quad x \in e^{(i)}, \tag{6}$$

где $r^{(i)}(x)$ — непрерывная на $e^{(i)}$ функция. Принимая это во внимание, перепишем (4) в виде

$$v(x) - i_h v(x) = (x - x_{i-1})(x - x_i) r^{(i)}(x), \quad x \in e^{(i)}. \tag{7}$$

Зафиксируем произвольную точку $x \in \overset{\circ}{e}{}^{(i)}$ (кружочек сверху означает, что берется только внутренняя часть $e^{(i)} = \overline{\overset{\circ}{e}{}^{(i)}}$) и введем в рассмотрение следующую функцию переменной $t$:

$$\varphi(t) = v(t) - i_h v(t) - (t - x_{i-1})(t - x_i) r^{(i)}(x), \quad t \in e^{(i)}. \tag{8}$$

В силу (7) эта функция обращается в нуль на $e^{(i)}$ по крайней мере в трех точках: $t = x_{i-1}$, $t = x_i$, $t = x$. Поэтому на основании теоремы Ролля ее первая производная $\varphi'$ обращается в нуль на $\overset{\circ}{e}{}^{(i)}$ по крайней мере в двух точках и существует точка $\xi^{(i)} \in \overset{\circ}{e}{}^{(i)}$, в которой обращается в нуль вторая производная $\varphi''$. Отсюда и из (8) с учетом тождества $d^2(i_h v(t))\,/\,dt^2 = 0$ находим, что

$$\varphi''(\xi^{(i)}) = v''(\xi^{(i)}) - 2r^{(i)}(x) = 0,$$

т.е.

$$r^{(i)}(x) = \frac{1}{2}v''(\xi^{(i)}).$$

Подставляя это значение $r^{(i)}(x)$ в (6), будем иметь

$$R^{(i)}(x) = \frac{1}{2}(x - x_i)(x - x_{i-1})v''(\xi^{(i)}).$$

Отсюда заключаем, что

$$\max_{x\in e^{(i)}} |R^{(i)}(x)| \leqslant \frac{h^2}{8} \max_{x\in e^{(i)}} |v''(x)|.$$

Эта оценка с учетом (4) и приводит к (2).

Докажем теперь (3). Пусть

$$\frac{d}{dx}(v(x) - i_h v(x)) = \tilde{R}^{(i)}(x), \quad x \in e^{(i)}. \tag{9}$$

В силу (5) существует точка $\tilde{\eta}^{(i)} \in \overset{\circ}{e}{}^{(i)}$ такая, что $\tilde{R}^{(i)}(\tilde{\eta}^{(i)}) = 0$. Поэтому

$$|\tilde{R}^{(i)}(x)| = \left| \int_{\tilde{\eta}^{(i)}}^{x} \frac{d}{d\xi}\tilde{R}^{(i)}(\xi)d\xi \right| = \left| \int_{\tilde{\eta}^{(i)}}^{x} v''(\xi)d\xi \right| \leqslant h \max_{x\in e^{(i)}} |v''(x)|,$$

откуда с учетом (9) и следует (3). □

Замечание 1. Установленных в теореме 1 оценок интерполяции вполне достаточно для того, чтобы с использованием оценки (11.24) доказать сходимость рассматриваемого МКЭ в норме $H^1$ со скоростью $O(h)$. При этом относительно решения $u(x)$ нужно предположить, что оно принадлежит $C^2$. Это предположение не является чрезмерно обременительным, но не является и необходимым для справедливости указанной скорости сходимости. Поэтому мы установим еще одну оценку погрешности интерполяции функциями из $S_1^h$ (прямо в $H^1$ и $L_2$), которая будет иметь место для интерполируемых функций из $H^2(I)$. Эта оценка окажет нам неоценимую услугу и при уточнении скорости сходимости метода в $L_2$.

## 2. Оценка линейной интерполяции в $L_2$ и $H^1$

Пусть $v(x) \in H^2(I)$. Поскольку $H^2(I) \subset H^1(I)$, а в силу леммы 11.1 функции из $H^1(I)$ непрерывны, то непрерывными являются и функции из $H^2(I)$ и можно говорить об их значениях в точке.

**Теорема 2.** *Если $v(x) \in H^2(I)$, а $i_h v \in S_1^h$ — ее интерполянт, то*

$$\| v - i_h v \|_0 \leqslant h^2 |v|_2, \tag{10}$$

$$\| v - i_h v \|_1 \leqslant \sqrt{2} h |v|_2. \tag{11}$$

Доказательство. По определению нормы в $H^1(I)$

$$\| v - i_h v \|_1^2 = \| (v - i_h v)' \|_0^2 + \| v - i_h v \|_0^2 .$$

Запишем каждое из этих слагаемых в виде суммы квадратов поэлементных норм

$$\| (v - i_h v)' \|_0^2 = \sum_{i=1}^{N} \| (v - i_h v)' \|_{L_2(e^{(i)})}^2,$$

$$\| v - i_h v \|_0^2 = \sum_{i=1}^{N} \| v - i_h v \|_{L_2(e^{(i)})}^2 .$$

Сделаем на элементе $e^{(i)} = [x_{i-1}, x_i]$ локальную замену переменной

$$(x - x_{i-1})/h = t \tag{12}$$

и будем писать

$$v(x) = v(x_{i-1} + ht) = \hat{v}^{(i)}(t), \quad i_h v(x) = i_h v(x_{i-1} + ht) = \hat{i}\hat{v}^{(i)}(t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} h^{-1} \| v - i_h v \|_{L_2(e^{(i)})}^2 &= \int_0^1 (\hat{v}^{(i)} - \hat{i}\hat{v}^{(i)})^2 dt, \\ h \| (v - i_h v)' \|_{L_2(e^{(i)})}^2 &= \int_0^1 \left[ \frac{d}{dt} (\hat{v}^{(i)} - \hat{i}\hat{v}^{(i)}) \right]^2 dt, \end{aligned} \tag{13}$$

$$h^3 \| (v - i_h v)'' \|_{L_2(e^{(i)})}^2 = h^3 \| v'' \|_{L_2(e^{(i)})}^2 = \int_0^1 \left( \frac{d^2 \hat{v}^{(i)}}{dt^2} \right)^2 dt. \tag{14}$$

Поскольку

$$\hat{v}^{(i)}(0) - \hat{i}\hat{v}^{(i)}(0) = \hat{v}^{(i)}(1) - \hat{i}\hat{v}^{(i)}(1) = 0,$$

то для разности $\hat{v}^{(i)}(t) - \hat{i}\hat{v}^{(i)}(t)$ справедливы леммы 11.2 и 11.3, в силу которых

$$\int_0^1 [\hat{v}^{(i)} - \hat{i}\hat{v}^{(i)}]^2 dt \leqslant \int_0^1 \left[\frac{d}{dt}(\hat{v}^{(i)} - \hat{i}\hat{v}^{(i)})\right]^2 dt \leqslant \int_0^1 \left[\frac{d^2}{dt^2}(\hat{v}^{(i)} - \hat{i}\hat{v}^{(i)})\right]^2 dt. \tag{15}$$

Используя эти неравенства для оценки правых частей (13) через правую часть (14) и возвращаясь при помощи левых частей (13), (14) назад к старым переменным, будем иметь

$$\| v - i_h v \|^2_{L_2(e^{(i)})} \leqslant h^4 \| v'' \|^2_{L_2(e^{(i)})},$$
$$\| (v - i_h v)' \|^2_{L_2(e^{(i)})} \leqslant h^2 \| v'' \|^2_{L_2(e^{(i)})}.$$

Суммируя теперь полученные оценки по $i$ от 1 до $N$, получим

$$\| v - i_h v \|_0^2 \leqslant h^4 |v|_2^2, \quad \| (v - i_h v)' \|_0^2 \leqslant h^2 |v|_2^2.$$

Первое из этих неравенств совпадает с (10). Складывая оба неравенства и замечая, что $(h^2 + 1) \leqslant 2$, приходим к (11). □

## 3. Сходимость в $H^1$

Имеет место

**Теорема 3** (сходимости). *Если выполнены условия* (11.16), (11.17) *и решение $u(x)$ задачи* (11.12), (11.13) *принадлежит $H^2(I)$, то решение задачи* (11.7), (11.14) *с $H^h = \tilde{S}_1^h$ из* (3.13) *(приближенное решение) сходится к решению задачи* (11.12), (11.13) *в смысле нормы пространства $H^1(I)$ со скоростью $O(h)$, т.е.*

$$\| u - u^h \|_1 \leqslant ch|u|_2,$$

*где $c = \text{const} > 0$ не зависит ни от $h$, ни от $u$.*

Доказательство. Требуемое неравенство следует из оценки (11.24), в которой положено $v^h = i_h u$, и теоремы 2. □

Итак, мы доказали сходимость изучаемого МКЭ на $S_1^h$ и установили оценку его скорости сходимости в смысле нормы пространства $H^1(I)$, которая оказалась $O(h)$ при $u \in H^2(I)$. Это предположение о гладкости искомого решения не является слишком обременительным; если бы мы при доказательстве теоремы 3 воспользовались не теоремой 2, а теоремой 1, то нам пришлось бы предполагать, что $u \in C^2(\bar{I})$. Но, как известно, аппетит приходит во время еды. Вводя в лекции 2 понятие обобщенного решения, мы были преисполнены гордости от того, что определили решение и в том случае, когда коэффициент $p(x)$ уравнения (11.12) имеет разрывы первого рода. Но если $p(x)\overline{\in}C(\bar{I})$, то обобщенное решение $u\overline{\in}H^2(I)$ и, казалось бы, полученные нами результаты о сходимости метода здесь не применимы. На самом деле, как следует из доказательства теоремы 2, предположение о принадлежности $u$ к $H^2$ должно иметь место только на элементах $e^{(i)}$, т.е. достаточно предполагать, что

$$u|_{e^{(i)}} \in H^2(e^{(i)}), \quad i = 1, \dots, N.$$

Но тогда, осуществляя разбиение $I$ на конечные элементы $e^{(i)}$, нужно позаботиться о том, чтобы точки разрыва коэффициента $p(x)$ (а лучше и точки разрыва других коэффициентов) попали на границы элементов. При этом может случиться, что не все элементы $e^{(i)}$ будут иметь одинаковую длину, т.е. сетка узлов может оказаться неравномерной. Но при доказательстве теоремы 2 по существу нигде и не предполагалось, что все элементы одинаковые. В новой редакции теоремы 2 нужно лишь под $h$ в (10) и (11) понимать $\max\limits_i h^{(i)}$, где

$$h^{(i)} = \operatorname{mes} e^{(i)} = x_i - x_{i-1}.$$

Итак, *наличие разрывов у коэффициентов уравнения* (11.12) *не является препятствием для сходимости МКЭ со скоростью $O(h)$, если разбиение на элементы произведено надлежащим образом.*

Ну, а что можно сказать о сходимости исследуемого МКЭ в смысле нормы $L_2(I)$? Разумеется, сходимость со скоростью $O(h)$ имеет место — это следует из теоремы 3. Но в теореме 2 говорится о том, что функция из $H^2(I)$ приближается своим интерполянтом из $S_1^h$ в $L_2(I)$ с точностью $O(h^2)$. Не будет ли такой же и скорость сходимости МКЭ? Ответ положительный, но для получения этой оценки мы не располагаем соотношением типа (11.24), и требуются специальные рассмотрения (см. теорему 14.3).

Еще один вопрос: не будет ли сходимость в $H^1(I)$ иметь более высокую скорость, если $u \in H^3(I)$? Оказывается, нет. Для повышения скорости сходимости МКЭ нужно использовать конечноэлементные пространства, образованные полиномами более высокой степени.

## 4. Оценка погрешности интерполяции из $S_k^h$

Рассмотрим вопрос о *полиномиальной интерполяции* более подробно. По аналогии с (3.8) и (6.1) введем в рассмотрение конечноэлементное пространство

$$S_k^h := \left\{ v^h \in C(\bar{I}) \middle| \quad v^h|_{e(i)} \in P_k\left(e^{(i)}\right), \quad i = 1, \ldots, N \right\}. \tag{16}$$

Выделим в нем подпространство

$$\tilde{S}_k^h = \{v^h \in S_k^h |\ v^h(0) = 0\} \tag{17}$$

и будем считать, что приближенным решением задачи (11.12), (11.13) является функция $u^h \in \tilde{S}_k^h$. Для оценки точности этого приближенного решения нам потребуется утверждение, аналогичное теореме 2.

Пусть $h^{(i)} = \operatorname{mes} e^{(i)} = x_i - x_{i-1}$,

$$h = \max_i h^{(i)};$$

мы в открытую отказываемся от предположения о равномерности разбиения отрезка $\overline{I} = [0, 1]$.

Обозначим через

$$x_j^{(i)} = x_{j-1} + \frac{h^{(i)}}{k} j, \quad j = 0, 1, \ldots, k,$$

узлы элемента $e^{(i)}$. Очевидно, что $x_0^{(i)} = x_{i-1}$, а $x_k^{(i)} = x_i$. Пусть функция $i_{h,k}v(x) \in S_k^h$ такая, что $i_{h,k}v(x_j^{(i)}) = v(x_j^{(i)})$. Будем ее называть интерполянтом $v(x)$.

**Теорема 4.** *Если $v \in H^{k+1}(I)$, а $i_{h,k}v \in S_k^h$ — ее интерполянт, то*

$$\| v - i_{h,k}v \|_l \leqslant ch^{k+1-l}|v|_{k+1}, \quad l = 0, 1, \tag{18}$$

*где $c = \text{const} > 0$ не зависит ни от $v$, ни от $h$.*

Доказательство. Будем следовать логике доказательства теоремы 2 и разобьем доказательство на пять этапов.

$1^\circ$. Представим квадрат оцениваемой нормы в виде суммы квадратов поэлементных норм

$$\| v - i_{h,k}v \|_l^2 = \sum_{i=1}^{N} \| v - i_{h,k}v \|^2_{H^l(e^{(i)})}, \quad l = 1, 2,$$

и будем проводить оценки на каждом элементе в отдельности.

$2^\circ$. Перейдем в интегралах по элементам к локальным переменным (12) (с $h^{(i)}$ вместо $h$). Принимая во внимание (13), будем иметь

$$\left(h^{(i)}\right)^{2l-1} |v - i_{h,k}v|^2_{H^l\left(\overset{\circ}{e}{}^{(i)}\right)} = |\hat{v}^{(i)} - \hat{i}_k\hat{v}^{(i)}|^2_{H^l(0,1)}, \quad l = 0, \ldots, k. \tag{19}$$

$3^\circ$. Оценим правую часть (19) через $L_2$ норму подходящей производной (через подходящую полунорму) (ср. с (15)). Это центральный и наиболее ответственный этап доказательства. Проводить его тем же способом, который был использован при доказательстве теоремы 2, при произвольном $k$ слишком трудно. Вместо этого мы сначала оценим $H^0(0,1)$ и $H^1(0,1)$-нормы через норму в пространстве $H^{k+1}(0,1)$. Очевидно (см. (1.15)), что при $k+1 \geqslant l$

$$|\hat{v} - \hat{i}_k\hat{v}^{(i)}|_{H^l(0,1)} \leqslant \| \hat{v} - \hat{i}_k\hat{v}^{(i)} \|_{H^{k+1}(0,1)} \tag{20}$$

и сама эта оценка на первый взгляд особой ценности не представляет. Однако, эта оценка оказывается тем, чем надо, если для функций вида $(\hat{v}(t) - \hat{i}_k\hat{v}(t))$ норма и полунорма в $H^{k+1}(0,1)$ эквивалентны. Данное предположение не будет выглядеть беспочвенным, если принять во внимание лемму 11.4 и тот факт, что функция $(\hat{v}(t) - \hat{i}_k\hat{v}(t))$ в $(k+1)$ точке отрезка $[0,1]$ обращается в нуль.

Итак, пусть имеет место

**Предложение**. *Для всякой функции* $\hat{v}(t) \in H^{k+1}(0,1)$

$$\| \hat{v}(t) - \hat{\imath}_k \hat{v}(t) \|_{H^{k+1}(0,1)} \leqslant c|\hat{v}(t) - \hat{\imath}_k \hat{v}(t)|_{H^{k+1}(0,1)}, \tag{21}$$

*где* $c = \text{const} > 0$ *не зависит от* $\hat{v}(t)$.

Доказательство этого предложения будет дано в следующей лекции, а пока подставим (21) в (20) и примем во внимание, что $d^{k+1}[\hat{\imath}_k \hat{v}(t)]/dt^{k+1} \equiv 0$. В результате будем иметь

$$|\hat{v}^{(i)} - \hat{\imath}_k \hat{v}^{(i)}|_{H^l(0,1)} \leqslant c|\hat{v}^{(i)}|_{H^{k+1}(0,1)}, \quad k+1 \geqslant l. \tag{22}$$

4°. Перейдем в (22) к старой переменной $x$. Принимая во внимание, что

$$|\hat{v}^{(i)}|^2_{H^{k+1}(0,1)} = \int_0^1 \left( \frac{d^{k+1}\hat{v}^{(i)}}{dt^{k+1}} \right)^2 dt = \left( h^{(i)} \right)^{2k+1} \int\limits_{e^{(i)}} \left( v^{(k+1)} \right)^2 dx$$

и учитывая (19), получим

$$|v - i_{h,k} v|_{H^l(e^{(i)})} \leqslant c \left( h^{(i)} \right)^{k+1-l} |v|_{H^{k+1}(e^{(i)})}, \quad l = 0, \ldots, k. \tag{23}$$

5°. Возведем в квадрат обе части полученного неравенства, а затем просуммируем по $i$ от 1 до $N$. Требуемая оценка (18) вытекает из полученного неравенства, если принять во внимание, что $h^{(i)} \leqslant h$. Справедливость теоремы в предположениях (21) доказана. □

**Теорема 5.** *Если выполнены условия* (11.16), (11.17) *и решение* $u(x)$ *задачи* (11.12), (11.13) *принадлежит* $H^{k+1}(I), k \in \mathbb{N}$, *то решение задачи* (11.7), (11.14) *с* $H^h = \tilde{S}_k^h$ *из* (17) *(приближенное решение) сходится к решению задачи* (11.12), (11.13) *в смысле нормы пространства* $H^1(I)$ *со скоростью* $O(h^k)$, *т.е.*

$$\| u - u^h \|_1 \leqslant ch^k |u|_{k+1},$$

*где* $c = \text{const} > 0$ *не зависит ни от* $h$, *ни от* $u$.

Доказательство теоремы следует из оценки (11.24) и теоремы 4. □

## 5. Упражнения

1. Доказать, что постоянная в правой части оценки (2) неулучшаема.

2. Пусть $v \in C^2(\bar{I})$ и $v(0) = v(1) = 0$, а $G(x,\xi)$ — функция Грина оператора $d^2/dx^2$ с граничными условиями первого рода. Тогда

$$v(x) = -\int_0^1 G(x,\xi)v''(\xi)d\xi.$$

Используя это представление, доказать, что

$$\Big|\frac{d}{dx}(v(x) - i_h v(x))\Big| \leqslant \frac{h}{2}\max_{x\in I}|v''(x)|.$$

Привести пример, показывающий, что постоянная в правой части этой оценки неулучшаема.

3. Пусть $v \in H_0^1(I)\bigcap H^2(I)$ и $\sum_1^\infty v_k\sqrt{2}\sin k\pi x$ — ее ряд Фурье. Для $l = 0, 1, 2$ проверить равенство $\| v^{(l)} \|_0^2 = \sum_{k=1}^\infty (k\pi)^{(2l)} v_k^2$ и доказать, что

$$\| v - i_h v \|_0 \leqslant \frac{h^2}{\pi^2}|v|_2, \quad |v - i_h v|_1 \leqslant \frac{h}{\pi}|v|_2.$$

Примерами подтвердить неулучшаемость постоянных в этих оценках.